# INVARIANTE IDEALE POSITIVER OPERATOREN AUF C*-ALGEBREN

Dissertation
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von
**José Vázquez**
aus
Tanhuato / Michoacán
México

1983

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547612_0050

# INVARIANTE IDEALE POSITIVER OPERATOREN AUF C*-ALGEBREN

Dissertation
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von
**José Vázquez**
aus
Tanhuato / Michoacán
México

1983

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Qualifikation: 30.Juni 1983

| | |
|---|---|
| Dekan: | Prof. Dr. A. Schönhage |
| 1. Berichterstatter: | Prof. Dr. R. Nagel |
| 2. Berichterstatter: | Prof. Dr. H.H. Schaefer |

Gedruckt mit Unterstützung des Deutschen Akademischen Austauschdienstes.

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung ..... 3

1. Links-Ideale einer $C^*$-Algebra ..... 19

2. T-Invariante Links-Ideale ..... 34

3. Maximale T-invariante Links-Ideale mittelergodischer Markov-Schwarz-Operatoren .....34

4. Irreduzible Markov-Operatoren ..... 43

5. Alles normal oder alles singulär ..... 47

Literaturverzeichnis ..... 55

## EINLEITUNG

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir positive Operatoren auf $C^*$- und $W^*$-Algebren unter den folgenden Aspekten: Bezeichnet T einen positiven Operator auf einer $C^*$- oder $W^*$-Algebra $A$, so interessieren wir uns für die Familie der unter T invarianten einseitigen Ideale in $A$ sowie für bestimmte Teilmengen des Duals $A^*$, die unter der Adjungierten $T^*$ invariant sind und in einer natürlichen Beziehung zu invarianten Links-Idealen stehen.

E.G. Effros [Eff] hat die Familie der Links-Ideale einer $C^*$-Algebra untersucht. Er stellt kanonische bijektive Beziehungen zwischen Links-Idealen, soliden Kegeln und soliden $C^*$-Unteralgebren einer $C^*$-Algebra her. Durch Bildung der Polaren werden diese Familien weiterhin in bijektive Beziehung zu Teilmengen des Duals bzw. des positiven Dualkegels gesetzt. Dabei zeigt E.G. Effros unter anderem, daß der positive Kegel eines Links-Ideals durch eine Ordnungsbedingung, nämlich Solidität, charakterisiert wird. Diese Tatsache läßt hoffen, daß die Familie der Links-Ideale ein gesetzmäßiges Verhalten unter

der Wirkung von positiven Operatoren aufweist.

H.H. Schaefer [Schae 1] untersucht ausführlich die Familie der invarianten Ideale eines positiven Operators T auf der Algebra C(X) der stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum X. Die dort entwikkelten Methoden benutzt T. Ando [An], um für den Fall eines quasi-stoneschen Raumes X Beziehungen zwischen bestimmten Eigenschaften von T einerseits und der Adjungierten $T^*$ andererseits herzustellen.

Die Algebra C(X) läßt sich nun als das typische Beispiel einer kommutativen $C^*$-Algebra mit Einheit auffassen. Zur Untersuchung von nicht mehr notwendigerweise kommutativen $C^*$-Algebren liegt daher der folgende Ansatz nahe, der sich bereits in vieler Hinsicht als fruchtbar erwiesen hat: Man versucht, bekannte Eigenschaften und Sätze, die für C(X) gelten, auf allgemeine $C^*$-Algebren zu übertragen. Dabei muß man sich zunächst vergewissern, ob diese Aussagen in dem allgemeineren Rahmen ihren Sinn behalten, und sie anderenfalls mit einem neuen, geeigneten Sinn versehen. Von einem solchen Ansatz geht die vorliegende Arbeit aus, wobei wir von den Ergebnisse von E.G. Effros häufig Gebrauch machen und die Arbeiten von H.H. Schaefer und T. Ando das Leitmotiv für unsere Verallgemeinerungen bilden.

Bei den angestrebten nicht-kommutativen Verallgemeinerungen stößt man zunächst auf folgendes Problem: Sei $A$ eine $C^*$-Algebra und $I \subset A$ ein abgeschlossenes Links-Ideal. Im kommutativen Fall ist $I$ ein zweiseitiges Ideal und der Quotient $A/I$ bildet in kanonischer Weise eine $C^*$-Algebra. Ist ferner T ein positiver Operator auf $A$ und $I$ ein T-invariantes Ideal, so induziert T auf $A/I$ wiederum einen positiven Operator. Diese Konstruktion spielt eine entscheidende Rolle in H.H. Schaefers Untersuchungen invarianter Ideale in C(X) [Schae 1, 2], läßt sich jedoch auf den nicht-kommutativen Fall nicht übertragen, da der Quotient einer beliebigen $C^*$-Algebra nach einem Links-Ideal im allgemeinen keine Algebra mehr zu sein braucht.

Will man also ähnliche Ergebnisse wie im kommutativen Fall erhalten, tritt das Problem auf, diese Quotientenbildung zu umgehen.

Nun folgt eine kurze Beschreibung des Inhaltes der einzelnen Kapitel:

1. Wir führen unsere Terminologie ein und diskutieren eindeutige Beziehungen zwischen der Familie der Links-Ideale einer $C^*$-Algebra $A$ und anderer Familien in der Algebra und in ihrem Dual. In diesem

Kapitel referieren wir die Ergebnisse von E.G. Effros, die für uns von Bedeutung sind. Vollständigkeitshalber fügen wir Beweisskizzen hinzu.

2. Wir beziehen Schwarz-Operatoren in die Diskussion ein und analysieren die invarianten Links-Ideale. Es wird gezeigt, daß die Ergebnisse des ersten Kapitels entsprechend für die Familie der invarianten Links-Ideale gelten. Weiterhin diskutieren wir den Begriff der Orthogonalität von Zuständen und wenden ihn auf die Untersuchung von invarianten Links-Idealen an.

3. Für einen mittelergodischen Operator T mit gewissen Positivitätseigenschaften stellen wir eine kanonische Bijektion zwischen der Familie der maximalen T-Links-Ideale und den Extremalpunkten der kompakten konvexen Menge der $T^*$-invarianten Zustände her. Dies verallgemeinert ein Resultat von H.H. Schaefer [Schae 1] für Operatoren auf nicht-kommutativen $C^*$-Algebren.

4. Irreduzible Operatoren sind solche, die kein nicht-triviales Links-Ideal invariant lassen. Wir zeigen, daß irreduzible Markov-Operatoren auf $W^*$-Algebren mittelergodisch sind. Für Markov-Operatoren

auf C(X) mit quasi-stoneschem kompaktem Raum X hat T. Ando diese Tatsache bewiesen.

5. Im letzten Kapitel untersuchen wir, welche Eigenschaften normaler Operatoren T auf $W^*$-Algebren durch Bedingungen an die Menge der $T^*$-invarianten Zustände $\mathcal{G}_T(A)$ charakterisiert werden können. Wir zeigen, daß $\mathcal{G}_T(A)$ genau dann aus lauter normalen Zuständen besteht, wenn der Operator T mittelergodisch und sein Fixraum endlichdimensional ist. Besteht $\mathcal{G}_T(A)$ aus lauter singulären Zuständen, dann kann der Operator T nicht mittelergodisch sein und jedes positive Element $a \neq 0$ majorisiert ein positives Element $b \neq 0$, so daß die Folge $\{T_n b\}_{n=1}^{\infty}$ sich bei 0 häuft. Diese Bedingung impliziert ihrerseits, daß $\mathcal{G}_T(A)$ nur singuläre Zustände enthält.

Die vorliegende Arbeit ist unter der Betreuung von Prof. Rainer Nagel entstanden.

Den Mitgliedern der Tübinger Arbeitsgruppen Funktionalanalysis und Operatoralgebren möchte ich meinen Dank aussprechen. Dem DAAD danke ich für die Förderung, die mein Studium an der Universität Tübingen ermöglicht hat.

## 1. LINKS-IDEALE EINER $C^*$-ALGEBRA

In diesem Abschnitt führen wir die im Folgenden benutzte Terminologie ein und referieren einige Hilfsmittel und Ergebnisse, die für unsere Betrachtungen eine Rolle spielen werden. Für die allgemeine Theorie der $C^*$- und $W^*$-Algebren sowie der positiven Operatoren richten wir uns nach den Lehrbüchern [Bra], [Ped], [Str], [Schae], [Tak].

1.1 Eine involutive Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit Involution $^*$ ist eine $C^*$-Algebra, wenn folgende zusätzliche Bedingung erfüllt ist:

Für jedes $a \in \mathcal{A}$ gilt $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

Mit $\mathcal{H}$ bezeichnen wir stets einen Hilbertraum und mit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ die $C^*$-Algebra der beschränkten linearen Operatoren auf $\mathcal{H}$.

Wir betrachten ausschließlich $C^*$-Algebren $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, .. mit Einheit $\mathbb{1}$.

Sei $\mathcal{A}$ eine $C^*$-Algebra. Ein Element $a \in \mathcal{A}$ heißt selbst-adjungiert, wenn $a^* = a$ gilt. Mit $\mathcal{A}_{sa}$ bezeichnen wir die Menge der selbst-adjungierte Elemente von $\mathcal{A}$. Ein Element $a \in \mathcal{A}$ heißt positiv, falls ein $x \in \mathcal{A}$ existiert, so daß $a = x^*x$ gilt. Dann schreiben wir kurz: $a \geq 0$. Wir setzen $\mathcal{A}_+ := \{ a \in \mathcal{A} \mid a \geq 0 \}$.

1.2 Ein reeller Vektorraum E ist ein <u>geordneter Vektorraum</u> (GVR), falls es eine Ordnung $\leq$ in E gibt, die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ für alle $x,y,z \in E$.

(2) $x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$ für alle $x,y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Sei E ein reeller Vektorraum. Eine Teilmenge $K \subset E$ heißt ein <u>Kegel</u>, wenn $K + K \subset K$ und $\lambda K \subset K$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Ein Kegel $K \subset E$ heißt <u>echt</u>, wenn $K \cap (-K) = (0)$. K ist <u>erzeugend</u>, wenn $E = K - K$. Jedem echten Kegel $K \subset E$ entspricht genau eine Ordnung $\leq$ in E, so daß $(E, \leq)$ ein GVR wird, dessen sogenannter positiver Kegel $E_+ := \{ x \in E \quad x \geq 0 \}$ genau K ist.

Eine Teilmenge $J \subset E$ heißt <u>solide</u>, wenn für jedes Element $a \in J$ das Intervall $[0,a] := \{x \in E | 0 \leq x \leq a\}$ in J enthalten ist.

Sei $K \subset E$ eine konvexe Menge. Eine Teilmenge $K_0 \subset K$ ist eine <u>Seite von</u> K, wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

Ist $x \in K_0$ und $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ mit $a,b \in K$, $\lambda \in [0, 1]$, dann $a,b \in K_0$.

<u>Bemerkung</u>: Sei E ein GVR und $J \subset E_+$ ein Kegel. Äquivalent sind: (i) J ist solide.

(ii) J ist eine Seite von $E_+$.

1.3 Wenn $A$ eine $C^*$-Algebra ist, dann bildet $A_+$ ein echten, normabgeschlossenen und erzeugenden Kegel von $A_{sa}$, und mit der von $A_+$ erzeugten Ordnung ist $A_{sa}$ ein GVR mit einer Ordnungseinheit gleich der algebreischen Einheit $1\!\!1$. Wir werden uns überwiegend mit Teilmengen von $A$ beschäftigen, die gewisse Bedingungen bezüglich der Ordnung erfüllen.

1.4 Sei $A$ eine $C^*$-Algebra. Eine $*$-Unteralgebra $B \subset A$ heißt solide, wenn $B_+$ solide ist. Ein Unterraum $I \subset A$ ist ein Links-Ideal, wenn $AI := \{ax \mid a \in A, x \in I\} \subset I$. Entsprechend kann man Rechts-Ideale definieren; sie stehen aber über die Involution in einer eineindeutigen Beziehung mit den Links-Idealen, so daß jede Aussage über Links-Ideale einer über Rechts-Ideale entspricht. Bequemlichkeitshalber werden wir von nun an alle unsere Aussagen ausschließlich für Links-Ideale formulieren.

1.5 Beispiel:
Betrachten wir die $C^*$-Algebra $A = C(X)$, so ist darin jedes abgeschlossene Links-Ideal ein zweiseitiges Ideal und auch eine solide $C^*$-Unteralgebra. Es gibt eine Bijektion zwischen abgeschlossenen Idealen in $A$ und abgeschlossenen Teilmengen $K \subset X$, so daß $K \subset X$

eindeutig das Ideal $I_K := \{ f \in A \mid f(t) = 0 \text{ für alle } t \in K \}$ bestimmt. Für eine beliebiege $C^*$-Algebra $A$ deckt nun folgender Satz die Beziehung zwischen abgeschlossenen Links-Idealen, soliden $C^*$-Unteralgebren und soliden Kegeln auf.

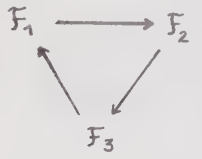
1.6 Satz: Sei $A$ eine $C^*$-Algebra. Dann gibt es inklusionserhaltende Bijektionen zwischen folgenden Familien:

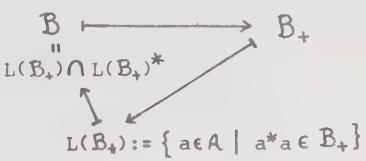
(i) $\mathcal{F}_1 := \{ B \subset A \mid B \text{ ist eine solide } C^*\text{-Unteralgebra von } A \}$.

(ii) $\mathcal{F}_2 := \{ K \subset A_+ \mid K \text{ ist ein abgeschlossener solider Kegel} \}$.

(iii) $\mathcal{F}_3 := \{ I \subset A \mid I \text{ ist ein abgeschlossenes Links-Ideal} \}$.

Die Bijektionen sind folgendermaßen gegeben:




Beweis: Da der positive Kegel einer $C^*$-Algebra die ganze Algebra linear aufspannt, ist die Abbildung von $\mathcal{F}_1$ nach $\mathcal{F}_2$ eine Bijektion. Für $K \in \mathcal{F}_2$ zeigen die Ungleichungen:

$(xa)^*(xa) \leq \|x\|^2 a^*a$ und

$(a + b)^*(a + b) \leq 2(a^*a + b^*b)$,

daß $L(K)$ ein Element von $\mathfrak{F}_3$ ist. Wenn $I \in \mathfrak{F}_3$ ist, so laßt sich unmittelbar einsehen, daß $I \cap I^*$ eine $C^*$-Unteralgebra von $A$ ist. Seien nun $a \in A$, $x \in I_+$ mit $a^*a \leq x$ gegeben. Nach dem Funktionalkalkül ist $x^{1/3} \in I_+$. Es gibt nun [Ped 1.4.5] eine Darstellung $a = ux^{1/3}$ mit $u \in A$ ähnlich der Polarzerlegung. Also ist $I \cap I^*$ eine solide $C^*$-Unteralgebra von $A$. Die Bijektivität zwischen $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ läßt sich einfach nachprüfen.

1.7 Bemerkungen: Sei $A$ eine $C^*$-Algebra und $I \subset A$ ein abgeschlossenes Links-Ideal.

1. Für $a \in A$ sind äquivalent:
   (i) $a \in I$
   (ii) $a^*a \in I$
   (iii) $|a| := (a^*a)^{1/2} \in I$
2. Wenn $a \in I$ ein selbstadjungiertes Element ist und $a = a^+ - a^-$ seine Jordan-Zerlegung bezeichnet, so sind $a^+, a^- \in I$.

1.8 Die Involution $x \longmapsto x^*$ in einer $C^*$-Algebra $A$ induziert eine Involution in ihrem Dual $A^*$. Für $\varphi \in A^*$ wird die Adjungierte von $\varphi$ folgendermaßen definiert:

$\varphi^*(a) := \overline{\varphi(a^*)}$ für alle $a \in A$. Ein lineares Funktional $\varphi \in A^*$ heißt selbst-adjungiert, wenn $\varphi = \varphi^*$. $\varphi$ ist positiv, wenn $\varphi(a) \geq 0$ für alle $a \in A_+$. Positive lineare Funktionale sind notwendig beschränkt und selbstadjungiert. Außerdem erfüllen sie die sogenannte Schwarz-Ungleichnung, die eine wichtige Rolle in der C*-Theorie spielt:
$|\varphi(b^*a)|^2 \leq \varphi(a^*a)\,\varphi(b^*b) \quad \forall\ a,b \in A$ [Ped 3.1].
$A_+^* := \{\varphi \in A^* \mid \varphi \geq 0\}$ ist ein echter, abgeschlossener und erzeugender Kegel im reellen Banachraum $A_{sa}^* := \{\varphi \in A^* \mid \varphi \text{ ist selbst-adjungiert}\}$ [Ped 3.2].

**1.9** Eine C*-Algebra $A$ ist eine W*-Algebra, wenn sie einen Prädual besitzt, d.h. es existiert ein Banachraum $A_*$ derart, daß $A$ der duale Raum von $A_*$ ist. Der Prädual einer W*-Algebra ist eindeutig bestimmt [Tak III, 3.9]. Der Projektorenverband $\mathcal{P}_A$ der W*-Algebra $A$ ist die Menge aller Projektionen in $A$.

Sei E ein Banachraum mit Dual $E^*$. Außer der Normtopologie in $E^*$ betrachten wir häufig die $\sigma(E^*, E)$-Topologie. Diese ist die gröbste Topologie in $E^*$, für die jedes $x \in E$ stetig ist. Für eine Teilmenge $K \subset E^*$ bezeichnet $\overline{K}^{\sigma^*}$ den Abschluß von K bezüglich der $\sigma(E^*, E)$-Topologie.

In einer W*-Algebra $A$ ist die Ordnungsstruktur

eng mit der $\sigma(A, A_*)$-Topologie verknüpft [Tak 3,3]. Ein positiver Operator $T \in \mathcal{L}(A)$ bzw. eine positive Linearform $\varphi \in A^*$ ist genau dann normal, wenn T bzw. $\varphi$ stetig bezüglich der $\sigma(A, A_*)$-Topologie ist.

1.10 Der Zustandsraum $\mathfrak{S}(A)$ einer $C^*$-Algebra $A$ ist die Menge der positiven linearen Funktionale der Norm 1. Es gilt:

$$\mathfrak{S}(A) = \{\varphi \in A^* \mid \varphi \geq 0 \text{ und } \varphi(\mathbb{1}) = 1\}.$$

Die Elemente von $\mathfrak{S}(A)$ heißen Zustände. Der Zustandsraum ist eine $\sigma(A^*, A)$-kompakte, konvexe Menge; daher erhalten die extremalen Punkte eine besondere Bedeutung. Die Extremalpunkte von $\mathfrak{S}(A)$ heißen reine Zustände.

Für $\varphi \in \mathfrak{S}(A)$ sind äquivalent:

(i) $\varphi$ ist ein reiner Zustand.

(ii) Für alle $\psi \in A^*$ impliziert die Annahme $0 \leq \psi \leq \varphi$, daß $\psi$ ein Vielfaches von $\varphi$ ist, d.h. $\psi = \lambda\varphi$ mit $\lambda \in [0,1]$.

Es gibt kanonische Wirkungen von einer $C^*$-Algebra $A$ in ihrem Dual. Seien $a \in A$, $\varphi \in A^*$, so sind $(L_a\varphi)(x) := \varphi(ax)$ und $(R_a\varphi)(x) := \varphi(xa)$ ebenfalls in $A^*$. Diese Wirkungen lassen den Prädual einer $W^*$-Algebra invariant. Ein Teilraum $V \subset A^*$ heißt links-invariant, wenn $L_a\varphi \in V$ für alle $a \in A$, $\varphi \in V$.

1.11 Satz. Sei $A$ eine $W^*$-Algebra mit Prädual $A_*$. Dann gibt es kanonische Bijektionen zwischen folgenden Familien:

(i) $\mathcal{P}_A$

(ii) $\mathcal{F}_1 := \{I \subset A \mid I$ ist ein $\sigma(A, A_*)$-abgeschlossenes Links-Ideal $\}$.

(iii) $\mathcal{F}_2 := \{V \subset A_* \mid V$ ist ein abgeschlossener, linksvarianter Teilraum von $A_* \}$.

(iv) $\mathcal{F}_3 := \{ V_+ \subset (A_*)_+ \mid V_+$ ist ein abgeschlossener solider Kegel$\}$.

Die Bijektionen sind durch folgendes Diagramm gegeben, wobei $(A_p)^\circ$ die Polare von $A_p$ in der Dualität $\langle A_*, A \rangle$ bezeichnet.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_A & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 \\ \uparrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_3 & \longleftarrow & \mathcal{F}_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} p & \longmapsto & A_p \\ \uparrow & & \downarrow \\ ((A_p)^\circ)_+ & \longleftarrow & (A_p)^\circ \end{array}$$

Beweis: [Ped 3.6.11], [1.10].
Es ist offensichtlich, daß die Bijektionen zwischen $\mathcal{P}_A$ und $\mathcal{F}_1$, bzw. $\mathcal{F}_2$ und $\mathcal{F}_3$ ordnungserhaltend sind, während die zwischen $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ die Ordnung umkehrt.

Durch die Beziehung $p \longmapsto A_p$ entsprechen also die Projektionen einer $W^*$-Algebra $A$ eineindeutig den $\sigma(A, A_*)$-abgeschlossenen Links-Idealen. Betrachtet man allgemeiner eine $C^*$-Algebra $A$, so stehen die normabgeschlossenen Links-Ideale in einer eineindeu-

tigen Beziehung zu gewissen $\sigma(A^*, A)$-abgeschlossenen Teilmengen des Duals. Zu ihrer Beschreibung benutzen wir unter anderem den folgenden Begriff.

1.12 Definition: Sei $A$ eine $C^*$-Algebra. Der Quasizustandsraum von $A$ ist die Menge $Q(A) := \{\varphi \in A^* \mid 0 \leq \varphi$ und $0 \leq \|\varphi\| \leq 1\}$.
Der Quasizustandsraum $Q(A)$ ist eine $\sigma(A^*, A)$-kompakte, konvexe Menge, deren Extremalpunkte 0 und die reinen Zustände von $A$ sind.

1.13 Satz. Sei $A$ eine $C^*$-Algebra. Dann stehen folgende Familien auf kanonische Weise in bijektiver Beziehung zueinander:

(i) $\mathcal{F}_1 := \{I \subset A \mid I$ ist ein abgeschlossenes Links-Ideal in $A\}$.

(ii) $\mathcal{F}_2 := \{V \subset A^* \mid V$ ist ein $\sigma(A^*, A)$-abgeschlossener, linksvarianter Teilraum von $A^*\}$.

(iii) $\mathcal{F}_3 := \{K \subset A_+^* \mid K$ ist ein $\sigma(A^*, A)$-abgeschlossener, solider Teilkegel von $A_+^*\}$.

(iv) $\mathcal{F}_4 := \{S \subset Q(A) \mid S$ ist eine $\sigma(A^*, A)$-abgeschlossene Seite von $Q(A)$, die 0 enthält$\}$.

(v) $\mathcal{F}_5 := \{S \subset G(A) \mid S$ ist eine $\sigma(A^*, A)$-abgeschlossene Seite von $G(A)\}$.

Die Bijektionen sind durch folgendes Diagramm gegeben, wobei die Polaren in der Dualität $\langle A, A^* \rangle$ zu verstehen sind:

Beweis. Gegeben $I \in \mathcal{F}_1$, dann ist $I^\circ$ linksinvariant; wenn $V \in \mathcal{F}_2$, so ist $V^\circ$ ein Links-Ideal. Der Bipolarensatz [Schae IV, 1.5] garantiert nun, daß die Abbildung von $\mathcal{F}_1$ nach $\mathcal{F}_2$ eine Bijektion ist. Sei wiederum $I \in \mathcal{F}_1$, so kann man mit Hilfe der Schwarz-Ungleichung folgende Gleichheit zeigen:

$$(I^\circ)_+ = \{\varphi \in A_+^* \mid \varphi(I_+) = 0\}.$$

Also $(I^\circ)_+ \in \mathcal{F}_3$.

Nun ist es einfach zu sehen, daß $I \cap Q(A) \in \mathcal{F}_4$. Ist umgekehrt $S \in \mathcal{F}_4$ gegeben, so folgt aus dem Satz von Krein-Smulian [Schae 2, IV,6.4], daß $\mathbb{R}_+ S \in \mathcal{F}_3$. Nach [1.11] gibt es eine Projektion $p \in A^{**}$, so daß $\mathbb{R}_+ S = \{\varphi \in A_+^* \mid \langle \varphi | p \rangle = 0\}$. Sei

$$E := \{\varphi \in A^* \mid \varphi(A^{**}p) \equiv 0\} = \{\varphi \in A^* \mid |\varphi| \in \mathbb{R}_+ S\},$$

wobei $|\varphi|$ den Positivteil von $\varphi$ in der Polarzerlegung von $\varphi$ bezeichnet [Sak 1.14]. Nun gilt $E \in \mathcal{F}_2$ mit $E \cap Q(A) = S$. Daß die Abbildungen von $\mathcal{F}_2$ nach $\mathcal{F}_3$ und von $\mathcal{F}_3$ nach $\mathcal{F}_4$ Bijektionen sind, läßt sich auf die Eindeutigkeit von $E$ zurückführen.

Wenn $\varphi \in A^*$ ein Zustand ist, so ist der Linkskern von $\varphi$, $I_\varphi := \{ a \in A \mid \varphi(a^*a) = 0 \}$, ein abgeschlossenes Links-Ideal in $A$. Als Korollar von [1.13] können wir $I_\varphi$ charakterisieren, wenn $\varphi$ ein reiner Zustand ist.

1.14 Korollar: Sei $A$ eine $C^*$-Algebra und $\varphi \in G(A)$. Äquivalent sind:

(i) $\varphi$ ist ein reiner Zustand.

(ii) $I_\varphi$ ist ein maximales Links-Ideal.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\varphi$ ein reiner Zustand. Nach [1.13] existiert ein maximales Links-Ideal I mit $I^\circ \cap G(A) = \{\varphi\}$. Es gilt also $I \subset I_\varphi$, und dies impliziert $I = I_\varphi$ wegen Maximalität von I.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wenn $I_\varphi$ maximal ist, dann ist $I_\varphi^\circ \cap G(A)$ eine minimale $\sigma(A^*, A)$-abgeschlossene Seite, also besteht sie aus einem einzigen, extremalen Element. Da aber $\varphi \in I_\varphi^\circ \cap G(A)$, ist $\varphi$ extremal.

## 2. T-INVARIANTE LINKS-IDEALE

Ein linearer Operator T auf einer $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$ heißt positiv, wenn $T(\mathcal{A}_+) \subset \mathcal{A}_+$. Positive Operatoren sind notwendig beschränkt. Ist $\mathcal{A}$ kommutativ, so gilt dann die folgende Ungleichung, auf die sich viele Argumentationen stützen:

(1) $Ta^* Ta \leq \|T\| T(a^*a)$ für alle $a \in \mathcal{A}$ [Tak IV, 3.8]. Dies ist keinesfalls allgemein gültig für nicht-kommutative $C^*$-Algebren.

2.1 Beispiel: Sei $\mathcal{A} := M_n$ die $C^*$-Algebra der komplexen nxn Matrizen. Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ der Transpositionsoperator:

$(Ta)_{ij} := a_{ji}$ für $a = (a_{ij}) \in M_n$.

T ist ein positiver Operator, erfüllt aber die Ungleichnung (1) nicht. Dies prüfen wir für n = 2 nach: Eine Matrix $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2$ ist genau dann positiv, wenn $a_{11} \geq 0$, $a_{22} \geq 0$, $a_{12} = \overline{a_{21}}$ und $|a_{12}|^2 \leq a_{11} a_{22}$. Daher ist es offensichtlich, daß T positiv ist. Nun ist aber für $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$Ta^* Ta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \|T\| \; T(a^*a).$$

2.2 Definition:

1. Ein linearer Operator T auf einer $C^*$-Algebra

$\mathcal{A}$ heißt ein Schwarz-Operator, wenn

$$Ta^* Ta \leq \|T\| T(a^*a) \quad \text{für alle} \quad a \in \mathcal{A}.$$

2. Ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ und $I \subset \mathcal{A}$ ein Links-Ideal, dann heißt $I$ ein T-Links-Ideal, wenn $I$ T-invariant ist, d.h. $T(I) \subset I$. Ein T-Links-Ideal ist maximal, wenn $I \neq \mathcal{A}$ ist und es kein T-Links-Ideal $J \neq \mathcal{A}$ gibt, welches $I$ echt enthält.

Es gibt eine sehr differenzierte Hierarchie von Positivitätsbegriffen für lineare Operatoren auf $C^*$-Algebren [Tak IV, 3]. So heißt ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ n-positiv, wenn der Operator $T_n(a \otimes m) := Ta \otimes m$, $a \in \mathcal{A}$, $m \in M_n$ auf dem Tensorprodukt $\mathcal{A} \otimes M_n$ positiv ist.
$\mathcal{A} \otimes M_n$ kann als die Algebra der Matrizen, deren Einträge Elemente von $\mathcal{A}$ sind, dargestellt werden. In dieser Darstellung wirkt $T_n$ komponentenweise:

$$(T_n a)_{ij} = (Ta_{ij}) \quad a = (a_{ij}) \in \mathcal{A} \otimes M_n.$$

Ein n-positiver Operator ist erwartungsgemäß m-positiv, wenn $m \leq n$. Es gibt aber für jedes $n \in \mathbb{N}$ Beispiele von n-positiven Operatoren, die nicht (n+1)-positiv sind [Choi 1].

Jeder 2-positive Operator ist ein Schwarz-Operator [Choi 2]. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ heißt vollständig positiv, wenn $T$ n-positiv ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Vollständig positive Operatoren genügen

einer sehr nützlichen Zerlegungseigenschaft; die sogenannte Stinespring-Zerlegung [Tak IV, 3.6].

2.3 Beispiele:

1. An folgendem einfachen Beispiel läßt sich oft die Richtigkeit einer Vermutung testen. Sei $\mathcal{A}$ eine $C^*$-Algebra und $\varphi \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, dann definiert:

$$1\!\!1 \otimes \varphi(a) := \varphi(a) 1\!\!1 \quad \text{für alle} \quad a \in \mathcal{A}$$

einen vollständig positiven Operator mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\{ \omega \in \mathcal{G}(\mathcal{A}) \mid (1\!\!1 \otimes \varphi)^* \omega = \omega \} = \{\varphi\}$.

(ii) Wenn $\mathcal{A}$ eine $W^*$-Algebra ist, dann ist $1\!\!1 \otimes \varphi$ genau dann normal, wenn $\varphi$ normal ist.

(iii) Die Familie der abgeschlossenen $1\!\!1 \otimes \varphi$-Links-Ideale besteht genau aus folgenden Elementen: (0), I und $\mathcal{A}$.

2. Sei $\mathcal{A}$ eine $C^*$-Algebra und $a \in \mathcal{A}$. Dann definiert:

$T_a(x) := a^* x a$, für alle $x \in \mathcal{A}$, einen vollständig positiven Operator, der genau dann Markov ist, wenn $a^* a = 1\!\!1$. Wenn $\mathcal{A}$ eine $W^*$-Algebra ist, so ist $T_a$ ein normaler Operator.

## Elementare Eigenschaften von Schwarz-Operatoren

2.4 Lemma: Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ ein Schwarz-Operator. Ein abgeschlossenes Links-Ideal I ist genau dann ein T-Links-Ideal, wenn $I_+$ T-invariant ist.

Beweis: Wenn I ein T-Links-Ideal ist, so gibt es nichts zu beweisen. Sei umgekehrt $I_+$ T-invariant. Nach [1.6] gilt: $I = \{a \in \mathcal{A} \mid a^*a \in I_+\}$ und $I_+$ ist solide. Für $a \in I$ gilt nun:
$Ta^* Ta \leq \|T\| \; Ta^*a \in I_+$, also $Ta \in I$.

2.5 Satz: Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ ein Schwarz-Operator und $\varphi \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ ein $T^*$-invarianter Zustand. Dann ist $I_\varphi$ ein T-Links-Ideal.

Beweis: Wenn $a \in I_\varphi$ ist, dann gilt:
$0 \leq \varphi(Ta^*Ta) \leq \|T\| \; \varphi(Ta^*a) = \|T\| \; \varphi(a^*a) = 0$,
also $Ta \in I_\varphi$.

2.6 Bemerkung: Wenn $T \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ ein Schwarz-Operator mit $T\,\mathbb{1} = \mathbb{1}$ ist (solche Operatoren werden Markov-Schwarz genannt), dann hat T Norm 1, und $T^*$ ist ein $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})$-stetiger Operator, der den Zustandsraum von $\mathcal{A}$ in sich abbildet. Der Satz von

Markov-Kakutani [Schae 2;III,7.12] garantiert die Existenz eines $T^*$-invarianten Zustandes. Nach [2.5] ist $I_\varphi$ ein T-Links-Ideal. Da $\varphi \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$ ist, gilt $I_\varphi \neq \mathcal{A}$.

2.7 Satz: Sei $\mathcal{A}$ eine $C^*$-Algebra und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein positiver Operator. Dann gilt:

(i) Die Menge der maximalen T-Links-Ideale ist nicht leer.

(ii) Ist $I \neq \mathcal{A}$ ein T-Links-Ideal, so existiert ein maximales T-Links-Ideal J mit $I \subset J$.

(iii) Jedes maximale T-Links-Ideal ist abgeschlossen.

Beweis: Dies ist eine übliche Anwendung des Zornschen Lemmas. Die Existenz der Einheit in der Algebra $\mathcal{A}$ garantiert, daß der Abschluß eines aufsteigenden Netzes echter, abgeschlossener Links-Ideale nicht die ganze Algebra sein kann.

Die maximalen T-Links-Ideale lassen sich als Links-Kerne von $T^*$-invarianten Zuständen darstellen, vorausgesetzt der Operator T ist ein Markov-Schwarz-Operator. (Vgl. 1.14)

2.8 Satz: Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein Markov-Schwarz-Operator, und sei $I \subset \mathcal{A}$ ein maximales T-Links-Ideal. Dann

existiert ein $T^*$-invarianter Zustand $\varphi$ derart, daß $I = I_\varphi$.

Beweis: Die Menge $I^\circ \cap \mathfrak{S}(\mathcal{A})$ ist $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})$-kompakt, konvex, $T^*$-invariant und nach [1.13] nicht leer. Auf Grund des Fixpunktsatzes von Markov-Kakutani existiert $\varphi \in I^\circ \cap \mathfrak{S}(\mathcal{A})$ mit $T^*\varphi = \varphi$. Der Links-Kern $I_\varphi$ ist nun ein T-Links-Ideal mit $I \subset I_\varphi$. Wegen der Maximalität von I folgt $I = I_\varphi$.

2.9 Korollar: Sei $\mathcal{A}$ eine $C^*$-Algebra. Dann stellt die Links-Kern-Abbildung $\varphi \longmapsto I_\varphi$ eine Bijektion zwischen der Familie der maximalen Links-Ideale in $\mathcal{A}$ und der Menge der reinen Zustände dar.

Beweis: Satz [2.7] und Korollar [1.14].

Im ersten Kapitel stellten wir drei Sätze vor ([1.5], [1.11], [1.13]), in welchen Bijektionen zwischen der Familie der Links-Ideale einer $C^*$-Algebra und anderen Familien hergestellt wurden. Wenn wir einen Schwarz-Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{A})$ in Betracht ziehen, taucht natürlicherweise die Frage auf, ob diese Bijektionen Invarianzeigenschaften bezüglich T erhalten. Eine Antwort darauf liefern die folgenden Sätze.

2.10 Satz: Sei $\mathcal{A}$ eine $C^*$-Algebra und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{A})$ ein

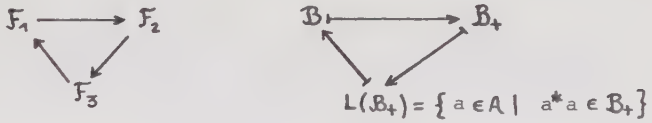
Schwarz-Operator. Dann gibt es inklusionserhaltende Bijektionen zwischen folgenden Familien:

(i) $\mathcal{F}_1 := \{ \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \mid \mathcal{B}$ ist eine solide, T-invariante $C^*$-Unteralgebra von $\mathcal{A} \}$.

(ii) $\mathcal{F}_2 := \{ K \subset \mathcal{A}_+ \mid K$ ist ein abgeschlossener, T-invarianter solider Kegel in $\mathcal{A}_+ \}$.

(iii) $\mathcal{F}_3 := \{ I \subset \mathcal{A} \mid I$ ist ein abgeschlossenes T-Links-Ideal $\}$.

Durch folgendes Diagramm sind die Bijektionen gegeben:




Beweis: Nach [1.6] reicht es nachzuprüfen, daß ein Objekt in einer der angegebenen Familien genau dann T-invariant ist, wenn die entsprechenden Objekte T-invariant sind. Dies läßt sich einfach nachvollziehen.

Jetzt wollen wir die in Satz 1.11 formulierten Zusammenhänge unter Einbeziehung eines Schwarz-Operators untersuchen. Die Frage nach der Beziehung zwischen der T-Invarianz eines $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$-abgeschlossenen Links-Ideals $\mathcal{A}_P$ und dem Verhalten von

$p \in \mathcal{P}_A$ liegt nahe:

2.11 Lemma: Sei $A$ eine $W^*$-Algebra, $T \in \mathcal{L}(A)$ ein Schwarz-Operator und $p \in \mathcal{P}_A$. Äquivalent sind:

(i) $Ap$ ist ein T-Links-Ideal.

(ii) $(Tp)p = Tp$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nach [2.4] genügt es nachzuprüfen, daß $T((Ap)_+) \subset Ap$. Ist nun $a \in (Ap)_+$, so gilt: $a = ap = pa = pap \leq \|a\| p$, also $0 \leq Ta \leq \|a\| Tp = \|a\| (Tp)p \in Ap$. Da $Ap$ solide ist, folgt: $Ta \in Ap$.

2.12 Satz: Sei $A$ eine $W^*$-Algebra mit Prädual $A_*$, und sei $T \in \mathcal{L}(A)$ ein normaler Schwarz-Operator. Dann gibt es kanonische Bijektionen zwischen folgenden Familien:

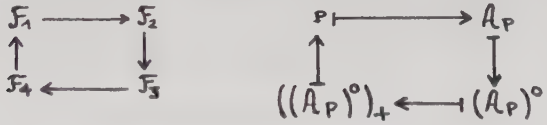
(i) $\mathcal{F}_1 := \{ p \in \mathcal{P}_A \mid Tp = (Tp)p \}$.

(ii) $\mathcal{F}_2 := \{ I \subset A \mid I$ ist ein $\sigma(A, A_*)$-abgeschlossenes T-Links-Ideal $\}$.

(iii) $\mathcal{F}_3 := \{ V \subset A_* \mid V$ ist ein abgeschlossener links- und $T_*$-invarianter Teilraum von $A_* \}$.

(iv) $\mathcal{F}_4 := \{ V_+ \subset (A_*)_+ \mid V_+$ ist ein abgeschlossener, $T_*$-invarianter solider Kegel in $(A_*)_+ \}$.

Die Bijektionen sind nach folgendem Diagramm gegeben:




Beweis: Lemma [2.11] stellt die Bijektion zwischen (i) und (ii) her. Die Gleichheit $\langle \varphi | Ta \rangle = \langle T_* \varphi | a \rangle$ für $\varphi \in A_*$, $a \in A$ garantiert, daß ein Links-Ideal I genau dann T-invariant ist, wenn die Polare $I^\circ$ bzw. deren positiver Teil $T_*$-invariant ist.

Im folgenden Satz müssen wir die Markovbedingung des Operators fordern, um zu garantieren, daß die Adjungierte $T^*$ die Mengen $\mathcal{G}(A)$ bzw. $Q(A)$ in sich selbst abbildet.

2.13 Satz: Sei $A$ eine $C^*$-Algebra und $T \in \mathcal{L}(A)$ ein Markov-Schwarz-Operator. Dann gibt es kanonische Bijektionen zwischen folgenden Familien:

(i) $\mathcal{F}_1 := \{ I \subset A \mid I$ ist ein abgeschlossenes T-Links-Ideal in $A \}$.

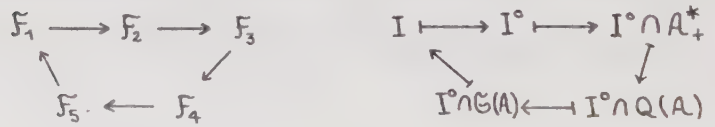
(ii) $\mathcal{F}_2 := \{ V \subset A^* \mid V$ ist ein $\sigma(A^*, A)$-abgeschlossener, links- und $T^*$-invarianter Teilraum von $A^* \}$.

(iii) $\mathcal{F}_3 := \{ K \subset A^*_+ \mid K$ ist ein $\sigma(A^*, A)$-abgeschlossener, $T^*$-invarianter, solider Teilkegel von $A^*_+ \}$.

(iv) $\mathcal{F}_4 := \{ S \subset Q(A) \mid$ S ist eine $\sigma(A^*, A)$-abgeschlossene, $T^*$-invariante Seite von $Q(A)$, die 0 enthält$\}$.

(v) $\mathcal{F}_5 := \{ S \subset G(A) \mid$ S ist eine $\sigma(A^*, A)$-abgeschlossene, $T^*$-invariante Seite$\}$.

Die Bijektionen sind nach folgendem Diagramm gegeben:




7.14 Definition

(1) Sei $A$ eine $W^*$-Algebra. Für eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathcal{P}_A$ bezeichnen wir das Infimum bzw. Supremum dieser Menge mit Inf M bzw. Sup M. Ist $M = \{p,q\}$, so wählen wir die kürzeren Zeichen: $\mathrm{Inf}\{p,q\} =: p \wedge q$ und $\mathrm{Sup}\{p,q\} =: p \vee q$.

(2) Seien $a \in A_+$ und $\varphi \in (A_*)_+$. Den Träger von a bzw. $\varphi$ bezeichnen wir mit s(a), bzw. $s(\varphi)$. Diese Projektionen sind folgendermaßen definiert:

$s(a) := \mathrm{Inf}\{ p \in \mathcal{P}_A \mid ap = a \}$

$s(\varphi) := \mathrm{Inf}\{ p \in \mathcal{P}_A \mid \varphi(p) = \varphi(1) \}$

Über Eigenschaften der Träger siehe [Str 5.15].

2.15 Satz: Sei $\mathcal{A}$ eine $W^*$-Algebra und $\varphi \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ normal. Dann gilt: $I_\varphi = \mathcal{A}_p$, wobei $p = \mathbb{1} - s(\varphi)$.

Beweis: Für $a \in \mathcal{A}$ gilt:

$\varphi(pa^*ap) = \varphi(pa^*a) - \varphi(pa^*a\, s(\varphi)) = 0$, also $\mathcal{A}_p \subset I_\varphi$. Umgekehrt, wenn $0 \leq a \in I_\varphi$, dann ist $as(\varphi) = 0$, also $ap = a$.

2.16 Bemerkungen: Sei $\mathcal{A}$ eine $W^*$-Algebra und $p,q \in \mathcal{P}_\mathcal{A}$.

(1) Äquivalent sind:

(i) $p \leq q$

(ii) $pq = qp = p$

(iii) $\mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{A}_q$

(2) $\mathcal{A}_p \cap \mathcal{A}_q = \mathcal{A}_{(p \wedge q)}$

(3) $(\mathbb{1} - p) \vee (\mathbb{1} - q) = \mathbb{1} - p \wedge q$

Wenn $T \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ ein normaler Schwarz-Operator ist und $\mathcal{A}_p, \mathcal{A}_q$ T-Links-Ideale sind, dann ist es nach den vorangegangenen Bemerkungen offensichtlich, daß $\mathcal{A}_{(p \wedge q)}$ ebenfalls ein T-Links-Ideal ist. Nicht ganz so offensichtlich ist, daß $\mathcal{A}_{(p \vee q)}$ auch ein T-Links-Ideal ist.

2.17 Satz: Sei $\mathcal{A}$ eine $W^*$-Algebra und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein normaler Markov-Schwarz-Operator. Seien $p,q \in \mathcal{P}_\mathcal{A}$ derart, daß $\mathcal{A}_p$ und $\mathcal{A}_q$ T-Links-Ideale sind. Dann ist $\mathcal{A}_{(p \vee q)}$ ebenfalls ein T-Links-Ideal.

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß der $\sigma$-$(A, A_*)$Abschluß von $A(p+q)$ gleich dem Links-Ideal $A(p \vee q)$ ist. Aus $(p+q)p \vee q = p+q$ folgt $A(p+q) \subseteq A(p \vee q)$. Es gilt also $\overline{A(p+q)}^{\sigma^*} = Ar \subseteq A(p \vee q)$ für eine eindeutig bestimmte Projektion $r \in \mathcal{P}_A$. Aus $p+q = r(p+q) \leq \|p+q\| r \leq 2r$ folgt $p \leq r$ und $q \leq r$, also $p \vee q \leq r$ und damit gilt die Gleichheit $Ar = A(p \vee q)$. Es gilt aber auch: $T(A(p+q)) \subseteq Ap + Aq \subseteq A(p \vee q)$. Die Normalität von T und die $\sigma^*$-Dichtheit von $A(p+q)$ in $A(p \vee q)$ garantieren nun die Aussage.

Es gibt in der Literatur zwei verschiedene Begriffe von Orthogonalität für positive lineare Funktionale auf $C^*$-Algebren, die wir hier kurz erläutern, unterscheiden und in Zusammenhang mit dem Vorherigen bringen wollen.

2.18 Gegeben eine $C^*$-Algebra $A$, seien $\varphi, \psi \in A_+^*$ und $\omega := \varphi + \psi$. Äquivalent sind:

(i) Es gibt kein von Null verschiedenes positives lineares Funktional, das gleichzeitig von $\varphi$ und $\psi$ majorisiert wird, d.h.: $0 \leq \omega' \leq \varphi$ und $0 \leq \omega' \leq \psi$ impliziert $\omega' = 0$.

(ii) Es existiert $p \in \pi_\omega(A)'$ mit $\varphi(a) = \langle p \pi_\omega(a) \xi_\omega \mid \xi_\omega \rangle$ und

$\psi(a) = \langle (\mathbb{1} - p)\pi_\omega(a)\xi_\omega \mid \xi_\omega \rangle$ für alle $a \in \mathcal{A}$.

(iii) $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \xi_\omega) = (\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi) \oplus (\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, \xi_\psi)$.

Beweis: Siehe [Bra 4.1.19].

Wenn $\varphi$ und $\psi$ diese Bedingung erfüllen, so sagen wir, daß sie schwach-orthogonal sind mit der Bezeichnung: $\varphi \perp \psi$.

Äquivalent sind ebenfalls:

(iv) $\| \varphi - \psi \| = \| \varphi \| + \| \psi \|$

(v) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $z \in \mathcal{A}$, $0 \leq z \leq \mathbb{1}$ mit $\varphi(z) < \varepsilon$ und $\psi(\mathbb{1} - z) < \varepsilon$.

Beweis: Siehe [Ped 3.2.3].

Falls $\varphi$ und $\psi$ diese Bedingung erfüllen, sagen wir, daß sie orthogonal sind und schreiben $\varphi \perp\!\!\!\perp \psi$.

2.19 Bemerkungen:

1. Wenn $\varphi$ und $\psi$ orthogonal sind, so sind sie schwach-orthogonal.

Beweis. Sei $0 \leq \omega' \leq \varphi, \psi$ und $\varepsilon > 0$. Sei $z \in \mathcal{A}$, $0 \leq z \leq \mathbb{1}$ mit $\varphi(z) < \varepsilon$, $\psi(\mathbb{1} - z) < \varepsilon$, und sei $0 \leq a \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann rechtfertigt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung die folgende Abschätzung:

$\omega'(a) = \omega'(az) + \omega'(a(\mathbb{1} - z)) \leq$

$\omega'(z^{1/2} a^2 z^{1/2}) \omega'(z) + \omega'((\mathbb{1} - z)^{1/2} a^2 (\mathbb{1} - z)^{1/2}) \omega'(\mathbb{1} - z) \leq$
$\leq 2 \|\omega'\| \|a\|^2 \varepsilon$ , also $\omega' = 0$.

2. Wenn $\mathcal{A}$ eine $W^*$-Algebra ist und $\varphi$ , $\psi$ normal sind, dann gilt $\varphi \perp\!\!\!\perp \psi$ genau dann, wenn $s(\varphi) \wedge s(\psi) = 0$.

3. Wenn die $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$ kommutativ ist, dann gilt $\varphi \perp \psi$ genau dann, wenn $\varphi \perp\!\!\!\perp \psi$. $\varphi \perp \psi$ impliziert $\varphi \perp\!\!\!\perp \psi$ im allgemeinen nicht. Beispiel: Die durch die Dichtematrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ definierten Zustände auf $M_2$ sind schwach-orthogonal, aber nicht orthogonal.

2.20 Korollar: Sei $\mathcal{A}$ eine $W^*$-Algebra und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein normaler Markov-Schwarz-Operator. Seien $\varphi, \psi \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$ zwei $T^*$-invariante normale Zustände. Sind $I_\varphi$ und $I_\psi$ verschiedene maximale Links-Ideale, dann sind $\varphi$ und $\psi$ orthogonal.

Beweis. Wären $\varphi$ und $\psi$ nicht orthogonal, dann wäre nach [2.17] $\mathcal{A}(\mathbb{1} - s(\varphi) \wedge s(\psi)) = \mathcal{A}(\mathbb{1} - s(\varphi)) \vee (\mathbb{1} - s(\psi)) \neq \mathcal{A}$ ein T-Links-Ideal, das sowohl $I_\varphi$ als auch $I_\psi$ enthält.

2.21 Satz: Sei $\mathcal{A}$ eine $C^*$-Algebra und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein Markov-Schwarz-Operator. Seien $I$ und $J$ verschiedene maximale T-Links-Ideale mit $I = I_\varphi$, $J = I_\psi$ für zwei $T^*$-invariante Zustände $\varphi$ und $\psi$. Dann sind $\varphi$ und $\psi$ schwach orthogonal.

Beweis: Angenommen, es gäbe ein $\omega \in A_+^*$, $\omega \neq 0$ mit der Eigenschaft $\omega \lesssim \varphi$ , $\omega \lesssim \Psi$ , dann hätte die Folge der Cesàro-Mittel $T_n^* \omega := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^{*i} \omega$ einen Berührungspunkt $\omega' \neq 0$ mit $T_n^* \omega' = \omega'$ und $\omega' \lesssim \varphi$, $\omega' \lesssim \Psi$. Der Links-Kern $I_{\omega'}$ ist ein T-Links-Ideal, das $I_\varphi \cup I_\Psi$ enthält, im Widerspruch zur Annahme.

## 3. MAXIMALE T-INVARIANTE LINKS-IDEALE MITTELERGODISCHER MARKOV-SCHWARZ-OPERATOREN

Im Satz [2.8] haben wir jedes maximale T-Links-Ideal als Links-Kern $I_\varphi$ eines $T^*$-invarianten Zustandes dargestellt. Für den Fall, daß der Operator T die Identität ist, haben wir in [2.9] gesehen, daß die Darstellung als Links-Kern eindeutig ist. Diese Eindeutigkeit besteht bei $T \neq Id$ im allgemeinen nicht mehr [An], [Ra].

Wir untersuchen in diesem Abschnitt eine Klasse von Operatoren, für die sich jedes maximale T-Links-Ideal als Links-Kern eines eindeutigen $T^*$-invarianten Zustandes darstellen läßt.

3.1 Definition: Sei $\mathcal{A}$ eine $C^*$-Algebra.

1. Auf $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ betrachten wir grundsätzlich die starke Operator-Topologie, die durch folgenden Konvergenzbegriff definiert wird: Sei $\{T_\alpha\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein Netz. Das Netz $\{T_\alpha\}$ konvergiert in der starken Operator-Topologie gegen T entlang $\alpha$, wenn $\| T_\alpha a - Ta \|$ gegen 0 konvergiert für alle $a \in \mathcal{A}$. Dieser Sachverhalt wird durch $\{T_\alpha\} \xrightarrow{\alpha} T$ bezeichnet.

2. Sei $G \subset \mathcal{L}(\mathcal{A})$ eine Halbgruppe von Operatoren auf $\mathcal{A}$. Ein Element $P \in G$ ist ein Nullelement von G, wenn $TP = PT = P$ für alle $T \in G$. Insbesonders gilt $P^2 = P$, d.h. P ist eine Projektion.

3. Eine Halbgruppe $G \subset \mathcal{L}(\mathcal{A})$ heißt mittelergodisch, wenn der Abschluß der konvexen Hülle von G in der starken Operator-Topologie $\overline{co}^{s}(G)$ ein Nullelement besitzt. Ein solches Nullelement ist dann eindeutig bestimmt und heißt die zu G assozierte Projektion. Man kann einfach zeigen, daß der Fixraum $F := \{a \in \mathcal{A} \mid Ta = a \ \forall \ T \in G\}$ der Bildraum der assozierten Projektion P ist.

4. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ heißt mittelergodisch, wenn die Halbgruppe $\{T^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mittelergodisch ist.

5. Ein positiver Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ heißt strikt-positiv, wenn $Ta \neq 0$ für alle $0 \neq a \in \mathcal{A}_+$.

3.2 Bemerkungen: Sei E ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(E)$ eine Kontraktion. Die folgenden Resultate finden sich in [Nag], [Schae 3].

1. Äquivalent sind:

   (i) T ist mittelergodisch.

   (ii) Für jedes $x \in E$, $x' \in E'$, enthält $\overline{co}\{T^n x\}_{n=1}^{\infty}$, bzw. $\overline{co}^{\sigma^*}\{T^{*n} x'\}_{n=1}^{\infty}$, einen T-, bzw. $T^*$-Fixpunkt.

(iii) Der Fixraum F von T trennt den Fixraum $F^*$ von $T^*$.

(iv) Für alle $x \in E$ gilt: $\overline{co}\{T^n x\}_{n=1}^{\infty} \cap F \neq \emptyset$.

2. Wenn T mittelergodisch ist, dann ist der Fixraum $F^*$ von $T^*$ kanonisch isomorph zu dem Dualraum von F.

3. Jede Kontraktion auf einem reflexiven Banachraum ist mittelergodisch.

3.3 Lemma: Sei $\mathcal{A}$ eine $C^*$-Algebra und sei $\mathcal{S}$ die Menge der Markov-Schwarz-Operatoren in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Dann ist $\mathcal{S}$ eine konvexe Halbgruppe in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, abgeschlossen bezüglich der starken Operator-Topologie.

Beweis: Die Ungleichnung
$(STa)^*(STa) \leq S((Ta)^*Ta) \leq ST(a^*a)$ zeigt, daß $\mathcal{S}$ eine Halbgruppe ist. Da $\mathcal{A}_+$ normabgeschlossen ist, läßt sich einfach zeigen, daß $\mathcal{S}$ abgeschlossen in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ ist. Die Konvexität von $\mathcal{S}$ kann man folgendermaßen nachprüfen: Sind $S, T \in \mathcal{S}$, so zeigt eine elementare Rechnung, daß $\frac{S+T}{2} \in \mathcal{S}$. Somit ist eine dichte Teilmenge der Strecke zwischen S und T in $\mathcal{S}$ enthalten, also liegt die ganze Strecke in $\mathcal{S}$.

3.4 Korollar: Sei $\mathcal{A}$ eine $C^*$-Algebra und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein Markov-Schwarz-Operator. Ist T mittelergodisch,

so ist die zu T assozierte mittelergodische Projektion P ebenfalls ein Markov-Schwarz-Operator.

Nun wollen wir die maximalen T-Links-Ideale eines mittelergodischen Markov-Schwarz-Operators in eine bijektive Beziehung mit der Menge der Extremalpunkte der Menge der $T^*$-invarianten Zustände setzen.

3.5 Satz: Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein mittelergodischer Markov-Schwarz-Operator mit assozierter Projektion P. Ist P strikt positiv, dann gibt es eine kanonische Bijektion zwischen folgende Mengen:

(i) $\mathcal{F}_l := \{I \subset \mathcal{A} \mid I$ ist ein maximales T-Links-Ideal$\}$.

(ii) $K := \{\varphi \in \mathcal{G}(\mathcal{A}) \mid \varphi$ ist ein Extremalpunkt der Menge der $T^*$-invarianten Zustände$\}$.

Diese Bijektion ist durch die Links-Kern-Abbildung $\varphi \longmapsto I_\varphi$ gegeben.

Beweis: Sei F bzw. $F^*$ der Fixraum von T bzw. $T^*$. Wir zeigen zuerst, daß F eine $C^*$-Unteralgebra von $\mathcal{A}$ ist. Offensichtlich ist F norm-abgeschlossen und selbst-adjungiert. Problematisch ist nur, ob F eine Unteralgebra von $\mathcal{A}$ ist.

Durch $B(a,b) := T(b^*a) - (Tb^*)Ta$ für $a,b \in \mathcal{A}$ definieren wir eine positive sesquilineare Abbildung B, die folgende Eigenschaft besitzt:

(1) $B(a,a) = 0$ genau dann, wenn $B(a,b) = 0$ für alle $b \in A$ [Groh 2.7].

Seien $a,b \in F$. Es gilt: $0 \leq B(a,a) = T(a^*a) - a^*a$. Wenden wir nun P an, so erhalten wir $P(B(a,a)) = 0$. Da P strikt positiv ist, folgt $B(a,a) = 0$, also nach (1) folgt $B(a,b^*) = 0$, d.h. $T(ba) = ba$. Nun stellt die Links-Kern-Abbildung nach [2.8] eine Bijektion zwischen der Menge der maximalen Links-Ideale in F und der Menge der reinen Zustände auf F her. Auf der Menge der Links-Ideale in F betrachten wir die Abbildung:

$k : I \longmapsto k(I) := \{ a \in A \mid P(a^*a) \in I \}$.

1. Behauptung: k ist eine Injektion von der Menge der Links-Ideale in F in die Menge der T-Links-Ideale in $A$. Ferner gilt: Für jedes Link-Ideal I in F ist $k(I) \cap F = I$, und $k(I)$ ist das größte T-Links-Ideal in $A$, dessen Durchschnitt mit F gerade I ergibt.

Beweis:

(i) $k(I)$ ist ein T-Links-Ideal: Es ist einfach nachzuprüfen, daß $k(I)$ abgeschlossen ist. Für $a \in k(I)$, $b \in A$, zeigen die Ungleichnungen

$$P((ba)^* ba) \leq \|b\|^2 P(a^*a)$$

$$P(Ta^*Ta) \leq P(Ta^*a) = P(a^*a),$$

daß $k(I)$ ein T-Links-Ideal ist.

(ii) Es gilt $k(I) \cap F = I$ : Für $a \in k(I) \cap F$ gilt $P(a^*a) = a^*a \in I$, also $a \in I$. Dies impliziert nun, daß k eine Injektion ist; denn $k(I) = k(J)$ impliziert $I = k(I) \cap F = k(J) \cap F = J$.

(iii) $k(I)$ ist das größte T-Links-Ideal in $\mathcal{A}$, dessen Durchschnitt mit F gerade I ergibt: Sei $J \subset \mathcal{A}$ ein T-Links-Ideal mit $J \cap F = I$ und sei $a \in J$. Dann ist auch $a^*a \in J$ und wegen der T-Invarianz von J folgt: $P(a^*a) \in J$. Also ist $P(a^*a) \in J \cap F = I$, d.h. $J \subset k(I)$.

2. Behauptung: k stellt eine Bijektion zwischen den maximalen Links-Idealen in F und den maximalen T-Links-Idealen in $\mathcal{A}$ her.

Beweis: Ist I ein maximales Links-Ideal in F und $J \subset \mathcal{A}$ ein T-Links-Ideal mit $k(I) \subset J$, so gilt: $I = F \cap k(I) \subset F \cap J$. I ist aber maximal, also gilt die Gleichheit $I = F \cap J$. Nach (iii) gilt nun $J = k(I)$, d.h. $k(I)$ ist maximal. Andererseits sei $J \subset \mathcal{A}$ ein maximales T-Links-Ideal. Für $I := J \cap F$ gilt nach (iii) $k(I) = J$, und wenn I ein Links-Ideal in F mit $I \subset I_0$ ist, dann folgt $J = k(I) \subset k(I_0)$. Also I ist maximal. Damit ist die Bijektivität von k bewiesen.

Ist schließlich ein maximales Links-Ideal $I \subset F$ gegeben, so gilt nach [2.9]:
$I = I_{\varphi_F} = \{a \in F \mid \varphi_F(a^*a) = 0\}$ für einen ein-

deutig bestimmten reinen Zustand $\varphi_F \in \mathcal{G}(F)$. Dieses $\varphi_F$ entspricht eindeutig einem extremalen $T^*$-invarianten Zustand $\varphi$. Man kann nun einfach zeigen, daß $k(I) \subset I_\varphi$, und wegen der Maximalität von $k(I)$ folgt: $k(I) = I_\varphi$.

Im Satz [3.5] haben wir ein Resultat von Schaefer [Schae 1] auf beliebige $C^*$-Algebren verallgemeinert. Dabei benötigten wir eine zusätzliche Bedingung über die mittelergodische Projektion P. Im folgenden Satz vermeiden wir diese Bedingung, fordern dafür aber eine stärkere Positivitätseigenschaft für dem Operator T.

3.6 Satz: Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein mittelergodischer, 2-positiver Markov-Operator. Dann gibt es eine kanonische Bijektion zwischen der Menge der maximalen T-Links-Ideale in $\mathcal{A}$ und der Menge der Extremalpunkte der Menge der $T^*$-invarianten Zustände.
Diese Bijektion ist durch die Links-Kern-Abbildung $\varphi \longmapsto I_\varphi$ gegeben.

Beweis: Wäre F eine $C^*$-Unteralgebra von $\mathcal{A}$, dann könnten wir genauso wie in [3.5] argumentieren. Wir können aber durch $a \circ b := P(ab)$

eine neue Multiplikation in F definieren. Im folgenden Lemma beweisen wir, daß $(F,\circ)$ eine $C^*$-Algebra ist. Die Bijektionsaussage des Satzes kann man dann wie in [3.5] nachvollziehen.

3.7 Lemma: Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein mittelergodischer, 2-positiver Markov-Operator mit mittelergodischer Projektion P. Dann ist der Fixraum F mit dem Produkt $a \circ b := P(ab)$ eine $C^*$-Algebra.

Beweis: Man kann einfach nachprüfen, daß F ein Banachraum ist. Die Ungleichungen

$$\|a^* \circ a\| = \|P(a^* a)\| \leq \|a^* a\| = \|a\|^2,$$

$$\|a\|^2 = \|a^* a\| = \|(Pa^*)Pa\| \leq \|P(a^* a)\| = \|a^* \circ a\|$$

für $a \in F$ zeigen, daß $(F, \circ)$ die $C^*$-Bedingung $\|a^* \circ a\| = \|a\|^2$ erfüllt.

Problematisch bleibt nur die Assoziativität des Produktes in F. Dazu ist für $x \in F$, $y \in \mathcal{A}$ zu zeigen

(1) $P(xPy) = P(xy)$ und

(2) $P((Py)x) = P(yx)$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß x und y selbstadjungierte Elemente sind. Definiere $d := \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & y \end{pmatrix} \in M_2(A)_{sa}$.

Da T 2-positiv ist, ist P auch 2-positiv, also erfüllt der Operator $P_2 \in \mathcal{L}(M_2(\mathcal{A}))$ die Schwarz-Ungleichung für selbstadjungierte Elemente [Ka].

Insbesondere ist $P_2(d)^2 \leq P_2(d^2)$, d.h.

$$\begin{pmatrix} x & , & xP(y) \\ P(y)x & , & * \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} Px & , & P(xy) \\ P(yx) & , & * \end{pmatrix}$$

wobei der Eintrag $(*)$ belanglos für unsere Überlegungen ist. Wir wenden nun $P_2$ auf beide Seiten an und erhalten, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & , & P(xy)-P(xPy) \\ P(yx)-P((Py)x) & , & * \end{pmatrix}$$

positiv in $M_2(\mathcal{A})$ ist. Dies ist aber nur möglich, wenn $P(xy) - P(xPy) = 0 = P(yx) - P((Py)x)$. Dies beweist nun (1) und (2) und damit gerade die Assoziativität des Produkts $\circ$ in F.

3.8 Korollar: Sei $\mathcal{A}$ eine endlichdimensionale $C^*$-Algebra und $T \in \mathcal{A}(\mathcal{A})$ ein 2-positiver Markov-Operator. Dann stellt die Links-Kern-Abbildung eine Bijektion zwischen folgenden Mengen her:

(i) Maximale T-Links-Ideale in $\mathcal{A}$.

(ii) Extremalpunkte der Menge der $T^*$-invarianten Zustände.

Beweis: T ist mittelergodisch [Nag 1.11].

## 4. IRREDUZIBLE MARKOV-OPERATOREN

4.1 Definition: Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ heißt irreduzibel, wenn T keine nicht-triviale Seite des positiven Kegels $\mathcal{A}_+$ invariant läßt. Ein Zustand $\varphi \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ heißt treu, wenn $I_\varphi = (0)$.

4.2 Bemerkungen:

1. Nach [2.10] ist ein Schwarz-Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ genau dann irreduzibel, wenn keine nicht-triviale solide $C^*$-Unteralgebra bzw. kein nicht-triviales, abgeschlossenes Links-Ideal von T invariant gelassen wird.
2. Ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein irreduzibler Markov-Operator, so gibt es mindestens einen $T^*$-invarianten Zustand $\varphi$, der dann treu sein muß. Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß es genau einen $T^*$-invarianten Zustand gibt, sofern $\mathcal{A}$ eine $W^*$-Algebra ist.

4.3 Lemma: Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein Markov-Operator, und sei $\varphi \in \mathcal{A}^*$ ein selbst-adjungiertes, $T^*$-invariantes Funktional mit Jordan-Zerlegung $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. Dann sind $\varphi^+$ und $\varphi^-$ $T^*$-invariant.

Beweis: Der Beweis stützt sich auf die Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung [Ped 3.2]. Offensichtlich

ist $\varphi = T^*\varphi = T^*\varphi^+ - T^*\varphi^-$, und wegen der Markov-Eigenschaft von T gilt $\|\varphi^+\| = \|T^*\varphi^+\|$ bzw. $\|\varphi^-\| = \|T^*\varphi^-\|$. Nun folgt: $\|\varphi\| = \|\varphi^+\| + \|\varphi^-\| = \|T^*\varphi^+ - T^*\varphi^-\| \leq \|T^*\varphi^+\| + \|T^*\varphi^-\| = \|\varphi^+\| + \|\varphi^-\|$, also ist $\|T^*\varphi^+ - T^*\varphi^-\| = \|T^*\varphi^+\| + \|T^*\varphi^-\|$.

4.4 Lemma: Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein Markov-Operator. Falls es zwei verschiedene $T^*$-invariante Zustände gibt, dann gibt es zwei orthogonale $T^*$-invariante Zustände.

Beweis: Seien $\varphi, \psi \in F^* \cap \mathcal{G}(\mathcal{A})$ mit $\varphi \neq \psi$ gegeben, und sei $\varphi - \psi = \omega^+ - \omega^-$ die Jordan-Zerlegung der Differenz. Nach [4.3] sind $\omega^+$ und $\omega^-$ $T^*$-invariant. Die Gleichung $0 = (\varphi - \psi)(\mathbb{1}) = \omega^+(\mathbb{1}) - \omega^-(\mathbb{1}) = \|\omega^+\| - \|\omega^-\|$ zeigt, daß $\omega^+$ und $\omega^-$ gleiche Norm haben. Die Zustände $\frac{\omega^+}{\|\omega^+\|}$ und $\frac{\omega^-}{\|\omega^-\|}$ erfüllen die Behauptung des Lemmas.

Folgende Aussage wurde für kommutative $C^*$-Algebren $C(X)$ mit quasi-stoneschem kompaktem Raum X von T. Ando bewiesen [An].

4.5 Satz: Sei $\mathcal{A}$ eine $W^*$-Algebra und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein irreduzibler Markov-Schwarz-Operator, dann ist T mittelergodisch.

Beweis: Sei F bzw. $F^*$ der Fixraum von T bzw. $T^*$.

Nach [Groh 2.7] ist F eindimensional, und wegen [3.2.1] genügt es zu zeigen, daß auch $F^*$ eindimensional ist.
Wegen [4.3] ist $F^*$ positiv erzeugt. Somit genügt es zu zeigen, daß die Menge $F^* \cap \mathfrak{S}(A)$ aus einem einzigen Zustand besteht.
Angenommen, $F^* \cap \mathfrak{S}(A)$ besteht aus mehr als einem Element, dann existieren nach Lemma [4.4] zwei zueinander orthogonale $T^*$-invariante Zustände $\varphi$ und $\psi$. Sei $\varphi = \varphi_n + \varphi_s$, bzw. $\psi = \psi_n + \psi_s$, die Lebesgue-Zerlegung von $\varphi$ bzw. $\psi$, in normalen und singulären Anteil [Tak, III 2.14]. Wegen der Irreduzibilität von T sind $\varphi$ und $\psi$ treu, und nach [Tak III,3.8] sind auch $\varphi_n$ und $\psi_n$ treu. Aus $\varphi \perp\!\!\!\perp \psi$ folgt nun $\varphi_n \perp\!\!\!\perp \psi_n$, also $s(\varphi_n) \wedge s(\psi_n) = 0$. Dies führt zu einem Widerspruch, denn wegen der Treue von $\varphi_n$ und $\psi_n$ gilt $s(\varphi_n) = \mathbb{1} = s(\psi_n)$ [Tak III,3.6].

Im vorherigen Satz haben wir Überlegungen zur Lebesgue-Zerlegung eines $T^*$-invarianten Zustandes $\varphi$ angestellt. Dabei war es nicht von Bedeutung, ob der normale Teil $\varphi_n$ oder der singuläre Teil $\varphi_s$, von $\varphi$ $T^*$-invariant sind. Im allgemeinen ist dies auch nicht zutreffend, wohl aber wenn der Operator T normal ist.

4.6 Satz: Sei $\mathcal{A}$ eine $W^*$-Algebra und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein normaler Markov-Operator. Sei $\varphi$ ein $T^*$-invarianter Zustand mit Lebesgue-Zerlegung $\varphi = \varphi_n + \varphi_s$. Dann sind $\varphi_n$ und $\varphi_s$ ebenfalls $T^*$-invariant.

Beweis: Der Beweis stützt sich auf die Eindeutigkeit der Lebesgue-Zerlegung [Tak III,2.14]. Nach Voraussetzung gilt $\varphi = T^*\varphi = T^*\varphi_n + T^*\varphi_s$, und $T^*\varphi_n$ ist normal. Sei $T^*\varphi_s = \varphi_1 + \varphi_2$ die Lebesgue-Zerlegung von $T^*\varphi_s$. Dann gilt: $\varphi = (T^*\varphi_n + \varphi_1) + \varphi_2$, also $\varphi_n = T^*\varphi_n + \varphi_1$. Nun ist $\varphi_n(\mathbb{1}) = (T^*\varphi_n)(\mathbb{1}) + \varphi_1(\mathbb{1}) = \varphi_n(\mathbb{1}) + \varphi_1(\mathbb{1})$ und daher $\varphi_1 = 0$, da $\varphi$ positiv ist. Also ist $T^*\varphi_s = \varphi_s$ und folglich auch $T^*\varphi_n = \varphi_n$.

4.7 Korollar: Sei $\mathcal{A}$ eine $W^*$-Algebra und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein normaler Markov-Operator; sei ferner $\varphi$ ein Extremalpunkt der Menge der $T^*$-invarianten Zustände. Dann ist $\varphi$ entweder normal oder singulär.

Beweis: Angenommen $\varphi$ ist weder normal noch singulär, und sei $\varphi = \varphi_n + \varphi_s$ die Lebesgue-Zerlegung von $\varphi$. Nach [4.6] sind $\varphi_n$ und $\varphi_s$ positive $T^*$-invariante lineare Funktionale. Also ist

$$\varphi = \varphi_n(\mathbb{1}) \frac{\varphi_n}{\varphi_n(\mathbb{1})} + \varphi_s(\mathbb{1}) \frac{\varphi_s}{\varphi_s(\mathbb{1})}$$

eine nichttriviale Konvexkombination von $\varphi$ mit $T^*$-invarianten Zuständen im Widerspruch zur Voraussetzung.

## 5. ALLES NORMAL ODER ALLES SINGULÄR

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit positiven Markov-Operatoren auf $W^*$-Algebren, für welche die Menge der invarianten Zustände entweder nur aus normalen oder nur aus singulären Zuständen besteht.

T. Ando hat solche Operatoren auf C(X) für einen quasi-stoneschen Raum X untersucht. Es ist wohlbekannt, daß eine kommutative $C^*$-Algebra C(X) genau dann eine $W^*$-Algebra ist, wenn der Raum X hyperstonesch ist [Tak III,1.18].

5.1 Lemma: Sei $A$ eine $C^*$-Algebra. Ist $A$ reflexiv, dann ist $A$ endlichdimensional.

Beweis: Ein unendliches direktes Produkt $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ [Dix 2.2] von $W^*$-Algebren $A_i$ ist nicht reflexiv, weil es eine Kopie von $\ell^\infty(\mathbb{N})$, der $W^*$-Algebra der beschränkten komplexen Folgen, enthält. Sei nun $\varphi$ ein reiner Zustand und $\pi_\varphi : A \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_\varphi)$ die zyklische, irreduzible Darstellung zu $\varphi$. Ist $A$ reflexiv, so ist $A$ eine $W^*$-Algebra, $\varphi$ normal und $\pi_\varphi(A) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_\varphi)$ $\sigma^*$-abgeschlossen, also $\pi_\varphi(A) = \mathcal{L}(\mathcal{H}_\varphi)$ [Tak III, 3.12]. Das impliziert, daß $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\varphi)$

ebenfalls reflexiv ist, und dies ist nur möglich, wenn $\dim \mathcal{H}_\varphi = n < \infty$. Nun ist der Kern $I_\varphi$ von $\pi_\varphi$ ein $\sigma(A, A_*)$-abgeschlossenes zweiseitiges Ideal, also existiert eine zentrale Projektion $p \in A$ mit $A = A_p \oplus A(1 - p) = A_p \oplus \mathcal{L}(\mathcal{H}_\varphi) = A_p \oplus M_n$, und $A_p$ ist wiederum reflexiv. Wäre $A$ unendlichdimensional, dann könnten wir per Induktion ein unendliches direktes Produkt von Matrix-Algebren in $A$ konstruieren.

5.2 Lemma: Sei $A$ eine $W^*$-Algebra und $T \in \mathcal{L}(A)$ ein normales Markov-Operator. Ist T mittelergodisch, dann ist auch die mittelergodische Projektion P normal.

Beweis: Da die Halbgruppe $\{T^n\}_{n=1}^\infty$ beschränkt ist, konvergieren die Cesàro-Mittel $T_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T^i$ gegen P in der starken Operator-Topologie [De IV,4]. Dies impliziert, daß die Cesàro-Mittel der Adjungierten $T_n^*$ gegen $P^*$ in der $\sigma^*$-Operator-Topologie konvergieren, d.h. $T_n^* \varphi \xrightarrow{\sigma^*} P^* \varphi$ für alle $\varphi \in A_*$. Nach Voraussetzung ist $T_n^* \varphi$ normal für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in A_*$. Dies impliziert, daß auch $P^* \varphi$ normal ist [Tak III,5.1].

5.3 Satz. Sei $\mathcal{A}$ eine $W^*$-Algebra und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{A})$ ein normaler, 2-positiver Markov-Operator. Sei $F$ bzw. $F^*$ der Fixraum von $T$ bzw. $T^*$. Äquivalent sind:

(i) Jeder $T^*$-invariante Zustand ist normal.

(ii) $F^* \subset \mathcal{A}_*$.

(iii) $T$ ist mittelergodisch und $\dim F < \infty$.

Beweis. Nach [4.3] sind (i) und (ii) äquivalent. (ii) $\Rightarrow$ (iii): Wir nehmen an, $T$ sei nicht mittelergodisch. Dann ist die direkte Summe $F \oplus (T - I)\mathcal{A}$ nicht normdicht in $\mathcal{A}$ [Yos VIII,3]. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert $\varphi \in \mathcal{A}^*$, $\varphi \neq 0$ mit $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in F \oplus (T - I)\mathcal{A}$, d.h. $\varphi(a) = 0$ für alle $a \in F$ und $T^*\varphi = \varphi$. Nach Voraussetzung ist $\varphi$ normal. Wegen der Zerlegung $\varphi = \frac{\varphi + \varphi^*}{2} + i\,\frac{\varphi - \varphi^*}{2i}$ können wir zusätzlich annehmen, daß $\varphi$ selbst-adjungiert ist. Sei $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ die Jordan-Zerlegung von $\varphi$, dann sind nach [4.3] auch $\varphi^+$ und $\varphi^-$ $T^*$-invariant. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $a_n \in \mathcal{A}_+^1$ mit $\varphi^+(a_n) < \frac{1}{n}$ und $\varphi^-(1\!\!1 - a_n) < \frac{1}{n}$. Da $\mathcal{A}_+^1$ $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$-kompakt ist, hat die Folge $a_n$ einen $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$-Häufungspunkt, d.h. es existiert $a_0 \in \mathcal{A}_+^1$ mit $\varphi^+(a_0) = 0$ und $\varphi^-(1\!\!1 - a_0) = 0$. Betrachte nun die Folge $\{T_n a_0\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_+^1$. Wiederum existiert ein $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$-Häufungspunkt $b \in \mathcal{A}_+^1$ dieser Folge. Somit gilt:

$Tb = b$, $\varphi^+(b) = \varphi^+(a_o) = 0$ und
$\varphi^-(b) = \varphi^-(a_o) = \varphi^-(\mathbb{1}) = \|\varphi^-\|$. Wegen $b \in F$ gilt andererseits: $0 = \varphi(b) = \varphi^+(b) - \varphi^-(b) =$
$= -\|\varphi^-\|$ und $0 = \varphi(\mathbb{1}) = \|\varphi^+\| - \|\varphi^-\| = \|\varphi^+\|$,
d.h. $\varphi = 0$ im Widerspruch zur Annahme. Also ist T mittelergodisch.

Nun ist der Dualraum von F isomorph zu $F^*$, also trennt F die Punkte von $F^*$. Nach Voraussetzung gilt $F^* \subset A_*$, und aus [Nag 1.7] folgt, daß $T_*$ ebenfalls mittelergodisch ist. Insbesondere gilt $(F')' \cong F$, d.h. F ist reflexiv. Sei P die mittelergodische Projektion zu T, dann ist F, versehen mit der Multiplikation $x \circ y := P(xy)$, eine $C^*$-Algebra [3.6]. Nach Lemma [5.1] ist F endlichdimensional.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Seien P die mittelergodische Projektion zu T, $\dim F = n$, $\{a_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von F und $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ die duale Basis von $F^*$. Für $a \in A$ gilt dann $Pa = \sum_{i=1}^n \varphi_i(a) a_i$. Nach Lemma [5.2] ist P normal. Dies ist aber nur möglich, wenn $\varphi_i$ normal ist für alle $i = 1, \ldots, n$. Also gilt $F^* \subset A_*$.

Bemerkung: In (ii) $\Rightarrow$ (iii) haben wir die Tatsache benutz, daß jede reflexive $C^*$-Algebra endlichdimensional ist; unter den Voraussetzung des Satzes ist die Isomorphie zwischen dem Fixraum F und seinem zweiten Dual F'' durch die kanonische Einbettung

von F in F'' gegeben.

Nun wenden wir uns dem anderen Extremfall zu, in dem alle invarianten Zustände singulär sind.

5.4 Definition.

1. Sei $A$ eine $W^*$-Algebra und $S \subset A_+$, dann gibt es einen kleinsten, $\sigma(A, A_*)$-abgeschlossenen, soliden Kegel $K \subset A_+$, der $S$ enthält, nämlich den Durchschnitt aller $\sigma(A, A_*)$-abgeschlossenen, soliden Kegel $K_\alpha \subset A_+$, die $S$ enthalten. Diesen soliden Kegel bezeichnen wir mit $k(S)$.

2. Eine $W^*$-Algebra heißt $\sigma$-endlich, wenn jede Familie $\{P_\alpha\}$ paarweise orthogonaler Projektionen höchstens abzählbar viele Elemente enthält. Äquivalent dazu ist die Existenz eines treuen normalen Zustands.

5.5 Satz. Sei $A$ eine $\sigma$-endliche $W^*$-Algebra und $T \in \mathcal{L}(A)$ ein normaler Markov-Operator. Seien

$N := \{\varphi \in \mathcal{G}(A) \mid T^*\varphi = \varphi \text{ und } \varphi \in A_*\}$.

$S := \{a \in A_+ \mid 0 \text{ ist ein } \sigma^*\text{-Häufungspunkt der Folge } \{T^n a\}_{n=1}^{\infty}\}$. Dann gilt $\bigcap_{\varphi \in N} (I_\varphi)_+ = k(S)$, wobei wir für den Fall $N = \emptyset$ $\bigcap_{\varphi \in N} (I_\varphi) := A_+$ setzen.

Beweis. Wir zeigen zuerst $k(S) \subset \bigcap_{\varphi \in N} (I_\varphi)$.

Im Fall $N = \emptyset$ gibt es nichts zu beweisen. Sei nun

$N \neq \emptyset$, $\varphi \in N$, $a \in S$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\varphi(T_n a) = T_n^* \varphi(a) = \varphi(a) < \varepsilon,$$

also ist $\varphi(a) = 0$. Dies impliziert nun $S \subset \bigcap_{\varphi \in N} (I_\varphi)_+$, also $k(S) \subset \bigcap_{\varphi \in N} (I_\varphi)_+$.

Jetzt zeigen wir die andere Inklusion. Wegen der Definition von $k(S)$ und weil $N$ entweder leer ist oder aus lauter normalen Zuständen besteht, existieren Projektionen $p,q$ in $\mathcal{A}$ mit

$$k(S) = q\mathcal{A}_+q \subseteq p\mathcal{A}_+p = \bigcap_{\varphi \in N} (I_\varphi)_+.$$

Angenommen es sei $q \neq p$. Sei $\varphi_0 \in \mathcal{A}^*$ ein treuer, normaler Zustand und $\varphi_1$ ein $\sigma^*$-Häufungspunkt der Folge $\{T_n^* \varphi_0\}_{n=1}^\infty$. Sei $\varphi_1 = \varphi_n + \varphi_s$ die Lebesgue-Zerlegung von $\varphi_1$ in normalen und singulären Teil. Da $\varphi_1$ positiv ist, sind $\varphi_n$ und $\varphi_s$ ebenfalls positiv. Wegen der Wahl von $\varphi_1$ gilt $T^*\varphi_1 = \varphi_1$ ; nach Satz 4.6 folgt, daß sowohl der singuläre wie auch der normale Teil von $\varphi_1$ $T^*$-invariant sind, d.h. $T^*\varphi_n = \varphi_n$ und $T^*\varphi_s = \varphi_s$ . Falls $\varphi_n \neq 0$ ist, dann ist $\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} \in N$. $\varphi_s$ ist singulär, also existiert eine Projektion $0 \neq p' \leq p-q$ mit $\varphi_s(p') = 0$. Dann gilt:

$0 \leq \varphi_1(p') = \varphi_n(p') + \varphi_s(p') \leq \varphi_n(p-q) = 0$,

also $\varphi_1(p') = 0$. Wegen der Wahl von $\varphi_1$ folgt nun, daß 0 ein $\sigma^*$-Häufungspunkt der Folge $\{T_n p'\}$ ist, also ist $p' \in q\mathcal{A}_+q$, im Widerspruch zur Annahme.

5.6 Korollar. Sei $A$ eine $\sigma$-endliche W*-Algebra und $T \in \mathcal{L}(A)$ ein normaler Markov-Operator. Dann gilt:

(i) Die $T^*$-invarianten Zustände sind genau dann sämtlich singulär, wenn für alle $0 \neq a \in A_+$ ein $b \in A_+$, $0 \neq b \leq a$, existiert derart, daß 0 ein $\sigma^*$-Häufungspunkt der Folge $\{T_n b\}_{n=1}^{\infty}$ ist.

(ii) Äquivalent sind:

(a) Es existiert ein treuer, normaler $T^*$- invarianter Zustand.

(b) Für jedes $0 \neq a \in A_+$ gilt $0 \notin \overline{\{T_n a\}_{n=1}^{\infty}}^{\sigma^*}$.

Im folgenden beschreiben wir ein Beispiel eines vollständig positiven, normalen Markov-Operators, der keinen normalen invarianten Zustand hat.

Beispiel. Sei $\mathcal{H} := \ell^2(\mathbb{N})$ der Hilbertraum der quadratisch summierbaren Folgen, $A := \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $u \in A$ der Links-shift auf $\mathcal{H}$ :

$$(u\xi)_i = \xi_{i+1} \quad \text{für } \xi = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{H}.$$

Wir betrachten $\ell^\infty(\mathbb{N})$, die Algebra der beschränkten Folgen, kanonisch in $A$ eingebettet durch:

$\lambda(\xi)_i = \lambda_i \xi_i$ für $\lambda = (\lambda_i) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ und $\xi = (\xi_i) \in \mathcal{H}$.

$u$ ist eine partielle Isometrie, $u^*$ ist der Rechts-shift, und es gilt: $uu^* = 1\!\!1$, $u^*u = (0, 1, 1, \ldots)$

Sei $T_u \in \mathcal{L}(A)$ der Operator $T_u(a) := uau^*$.

Behauptung: $T_u$ ist ein vollständig positiver, normaler Markov-Operator ohne normale invariante Zustände.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß $T_u$ keinen normalen invarianten Zustand besitzt. Sei $\varphi$ ein normaler Zustand. Angenommen $\varphi$ ist $T_u^*$-invariant. Betrachte $\varphi_0 := \varphi \, \ell^\infty(\mathbb{N})$, die Einschränkung von $\varphi$ auf $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Da $1 \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, ist $\varphi_0$ ein Zustand auf $\ell^\infty(\mathbb{N})$, der auch normal sein muß. Also existiert eine absolutsummierbare Folge $\rho = (\rho_i) \in \ell^1(\mathbb{N})$ mit $\varphi_0(f) = \mathrm{tr}(\rho f)$ für alle $f \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ [Bra 2.4.21]. Nun läßt $T_u$ $\ell^\infty(\mathbb{N})$ invariant, also $T_u^* \varphi_0 = \varphi_0$, d.h. $\varphi_0(ufu^*) = \mathrm{tr}(\rho\, ufu^*) = \mathrm{tr}(u^*\rho\, uf)$ für alle $f \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Aus der Eindeutigkeit von $\rho$ folgt $u^* \rho\, u = \rho$. Dies ist aber nur möglich für $\rho = 0$, d.h. $\varphi_0 = 0$, im Widerspruch zur Annahme.

## LITERATURVERZEICHNIS

[Alf] Alfsen, E.M.: Convex compact sets and boundary integrals, Springer Verlag, 1971.

[An] Ando, T.: Invariante Maße positiver Kontraktionen in C(X). Studia Math. 31, 173-187. (1968)

[Bra] Bratteli, O; Robinson, D.W.: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I. Springer Verlag 1979.

[Choi 1] Choi, M.D.: Positive linear maps on $C^*$-Algebras, Can. J. Math., 24 (1972), 520-529.

[Choi 2] Choi, M.D.: A Schwartz inequality for positive linear maps on $C^*$-Algebras, Illinois J. Math., 18 (1974), 565-574.

[De ] Derndinger, R; Nagel,R.; Palm, G.: 13 lectures on ergodic theory, Manuscript. Tübingen 1982.

[Dix] Dixmier, J.: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris 1969.

[Eff] Effros, E.G.: Order ideals in a $C^*$-algebra and its dual, Duke Math. J., 30 (1963), 391-412.

[Groh] Groh, U.: Das Spektrum positiver Operatoren auf $C^*$-Algebren, Dissertation, Tübingen 1979.

[Ka] Kadison, R.V.: A generalised Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras. Ann. Math. 65, 494-503 (1952).

[Kü] Kümmerer, B.; Nagel, R.: Mean ergodic semigroups on $W^*$-algebras. Acta Sci. Math., 41 (1979) 151-159.

[Nag] Nagel, R.: Mittelergodische Halbgruppen linearer Operatoren. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 23, 4 (1973), 75-87.

[Ped] Pedersen, G.K.: $C^*$-algebras and their automorphism groups, Academic Press 1979.

[Ra] Raimi, R.A.: Minimal sets and ergodic measures in $\beta(\mathbb{N})\setminus\mathbb{N}$. Bull. Amer. Math. Soc. 70, 711-712. (1964).

[Sak] Sakai, S.: $C^*$-algebras and $W^*$-algebras, Springer Verlag, 1971.

[Str] Stratila, S.; Zsidó, L.: Lectures on von Neumann Algebras. Abacus Press. 1979.

[Schae 1] Schaefer, H.H.: Invariant ideals of positive operators in C(X), I, II. Illinois J. Math. 11, 703-715 (1967), 12, 525-538 (1968).

[Schae 2] Schaefer, H.H.: Topological vector spaces. Springer Verlag 1970.

[Schae 3] Schaefer, H.H.: Banach lattices and positive operators. Springer Verlag 1974.

[Stø 1] Størmer, E.: Positive linear maps on operator algebras. Acta Math. 110, 233-278 (1963).

[Stø 2] Størmer, E.: Positive linear maps on $C^*$-algebras. Lectures notes in Physics, 29 85-106 Springer Verlag 1974.

[Tak] Takesaki, M.: Theory of operator algebras I. Springer Verlag 1979.

[Yos] Yosida, K.: Functional analysis, Springer Verlag, 1965.

## LEBENSLAUF

Am 10.Mai 1953 wurde ich, José de Jesús Vázquez Díaz, als Sohn des Landwirtes Juan Vázquez Zamudio und seiner Ehefrau Rufina Díaz de Vázquez, in Tanhuato, Michoacán (México) geboren. Nach sechsjähriger Grundschulzeit in Guadalajara, Jalisco (México), besuchte ich dort das Gymnasium "Instituto de Ciencias", an dem ich im Sommer 1972 die Reifeprüfung ablegte. Danach beschäftigte ich mich mit einem einführenden Studium in die Mathematik. Während dieser Zeit wurde ich privat von Prof. A. García Máynez betreut, der am "Centro de Investigación y Estudios Avanzados del I.P.N." (kurz C.I.E.A.) lehrt. Im Sommer 1974 legte ich eine Aufnahmeprüfung für das Mathematische Institut des C.I.E.A. ab und studierte dort bis 1976. Während dieser Zeit war ich Stipendiat des "Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología". Im Sommer 1975 vertrat ich eine Assistentenstelle an der Universität von Veracruz in Xalapa (México). Die Magisterprüfung legte ich im April 1977 am C.I.E.A. ab. Von Januar bis September 1977 arbeitete ich an der "Universidad de las Américas" in Puebla (México).

Im Oktober 1977 wurde ich Stipendiat des DAAD. Während des Wintersemesters 1977-1978 besuchte ich

das Goethe-Institut in Freiburg i.Br.. Seit dem Sommersemester 1978 bin ich Doktorand am Mathematischen Institut der Universität Tübingen. Die vorliegende Arbeit entstand in der Zeit von 1980 bis 1983.

Meine akademischen Lehrer waren in México die Herren E. Antoniano, J. Corona, S. Feder, A. García Máynez, S. Gitler, L. Goroztiza, S. Hahn Goldberg, W. Iberkleid und J.J. Rivaud; in Tübingen die Herren H. Fischer, H. Hähl, R. Nagel, H.H. Schaefer und U. Schlotterbeck im Fach Mathematik und die Herren U. an der Heiden, H. Dahmen und D. Varjú im Fach Biologie.